Suma de radicales

Solamente pueden **sumarse** (o **restarse**) **dos radicales** cuando son **radicales semejantes**, es decir, si son **radicales** con el **mismo índice** e **igual radicando**.

Para sumar radicales con el mismo índice e igual radicando se se suman los coeficientes de los radicales.

$$a\sqrt[n]{k}+b\sqrt[n]{k}+c\sqrt[n]{k}=(a+b+c)\sqrt[n]{k}$$

Ejemplos:

1 $2\sqrt{2}-4\sqrt{2}+\sqrt{2}$

Sumamos los coeficientes de los radicales

$$(2-4+1)\sqrt{2}=-\sqrt{2}$$

2 $3\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{5}$

Sumamos los coeficientes de los radicales

$$(3-2-1)\sqrt[4]{5}=0$$

3 $\sqrt{12}-3\sqrt{3}+2\sqrt{75}$

Descomponemos en factores los radicandos:

$$12=2^2\cdot 3,\quad 75=3\cdot 5^2$$

De manera que las raíces son

$$\sqrt{2^2\cdot 3}-3\sqrt{3}+2\sqrt{5^2\cdot 3}$$

Extraemos factores de los radicales y los multiplicamos por el coeficiente del radical correspondiente

$$2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+10\sqrt{3}$$

Sumamos los coeficientes de los radicales

$$9\sqrt{3}$$

4 $\sqrt[4]{4}+\sqrt[6]{8}-\sqrt[12]{64}$

Extraemos factores de los radicales y los multiplicamos por el coeficiente del radical correspondiente

$$4=2^2,\quad 8=2^3,\quad 64=2^8$$

De manera que

$$\sqrt[4]{2^2}+\sqrt[6]{2^3}-\sqrt[12]{2^6}$$

Simplificamos los radicales. En el primer radical dividimos el índice y el exponente del radicando por 2, en el segundo por 3 y en el tercero por 6

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

Sumamos los coeficientes de los radicales

$$\sqrt{2}$$

Ejemplos de ejercicios de suma y resta de radicales

$$2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + \sqrt{27}$$

$$2\sqrt{2^2 \cdot 3} - 3\sqrt{3 \cdot 5^2} + \sqrt{3^3} = 4\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = -8\sqrt{3}$$

$$\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486} = \sqrt{2^3 \cdot 3} - 5\sqrt{6} + 2\sqrt{2 \cdot 3^5} = 2\sqrt{6} - 5\sqrt{6} + 9\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$$

$$2\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80} = 2\sqrt{5} + \sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} - \sqrt{2^4 \cdot 5} =$$

$$\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} =$$

$$= 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} + \sqrt[6]{4} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} =$$

$$= \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} + \sqrt[6]{2^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}$$

$$= 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2}}$$

$$= 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - \frac{\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{15}{2}\sqrt[3]{2}$$

Multiplicación de radicales con el mismo índice

Para **multiplicar radicales con el mismo índice se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice**.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Cuando terminemos de realizar una operación extraeremos factores del radical, si es posible.

Multiplicación de radicales con distinto índice

Primero se reducen a común índice y luego **se multiplican**.

Ejemplos:

1 $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27} =$

Descomponemos en factores los radicandos

$$= \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[4]{3^3}$$

Reducimos a común índice por lo que tenemos que calcular el mínimo común múltiplo de los índices, que será el común índice.

$$\text{m.c.m.}(2, 3, 4) = 12$$

Dividimos el común índice (12) por cada uno de los índices $(2, 3, 4)$ y cada resultado obtenido se multiplica por sus exponentes correspondientes $(1, 2, 3)$. Realizamos el producto de potencias con la misma base en el radicando y extraemos factores del radicando

$$= \sqrt[12]{3^6} \cdot \sqrt[12]{(3^2)^4} \cdot \sqrt[12]{(3^3)^3} = \sqrt[12]{3^6 \cdot 3^8 \cdot 3^9} = \sqrt[12]{3^{23}} = 3\ \sqrt[12]{3^{11}}$$

2 $\sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{36} =$

Calculamos el mínimo común múltiplo de los índices

$$\text{m.c.m.}(2, 3) = 6$$

Dividimos el común índice (6) por cada uno de los índices $(2, 3)$ y cada resultado obtenido se eleva a los radicandos correspondientes

$$\sqrt[6]{12^3} \cdot \sqrt[6]{36^2} = \sqrt[6]{(2^2 \cdot 3)^3 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^2} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^4} = \sqrt[6]{2^{10} \cdot 3^7} = 6\sqrt[6]{2^4 \cdot 3}$$

Descomponemos en factores 12 y 36, realizamos las operaciones con las potencias y extraemos factores

División de radicales con el mismo índice

Para dividir radicales con el mismo índice **se dividen los radicandos y se deja el mismo índice.**

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} = \sqrt[6]{\frac{128}{16}} = \sqrt[6]{\frac{2^7}{2^4}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

Como los dos radicales tienen el mismo índice lo ponemos todo en un radical con el mismo índice

Descomponemos en factores, hacemos la división de potencias con la misma base

Simplificamos el radical dividiendo el índice y el exponente del radicando por 3

División de radicales con distinto índice

Primero se reducen a índice común y luego **se dividen.**

Ejemplos:

1 $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} =$

En primer reducimos a común índice por lo que tenemos que calcular el mínimo común múltiplo de los índices, que será el común índice. $\text{m.c.m.}(3, 2) = 6$.

Dividimos el común índice (6) por cada uno de los índices (3 y 2) y cada resultado obtenido se multiplica por sus exponentes correspondientes (1 y 1)

Descomponemos el 4 en factores para poder hacer la división de potencias con la misma base y dividimos

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{(2^2)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$$

2 $\dfrac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}}=$

Realizamos los mismos pasos del ejercicio anterior

$$\frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}}=\sqrt[6]{\frac{256^3}{16^2}}=\sqrt[6]{\frac{(2^8)^3}{(2^4)^2}}=\sqrt[6]{\frac{2^{24}}{2^8}}$$

Simplificamos el radical dividiendo por 2 el índice y el exponente del radicando, y por último extraemos factores

$$=\sqrt[6]{2^{16}}=\sqrt[3]{2^8}=2^2\sqrt[3]{2^2}=4\sqrt[3]{4}$$

Potencia de un radical

Para elevar un radical a una potencia, se eleva a dicha potencia el radicando y se deja el mismo índice.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo:

1 $\left(\sqrt[3]{18}\right)^2=$

Elevamos el radicando al cuadrado, descomponemos 18 en factores y los elevamos al cuadrado y por último extraemos factores

$$\left(\sqrt[3]{18}\right)^2=\sqrt[3]{18^2}=\sqrt[3]{(2\cdot 3^2)^2}=\sqrt[3]{2^2\cdot 3^4}=3\sqrt[3]{12}$$

2 $\left(\dfrac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4=$

Elevamos los radicandos a la cuarta, descomponemos en factores los radicandos y extraemos el 18 del radical

$$\left(\frac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4=\frac{\sqrt[3]{(12)^4}\cdot\sqrt[4]{(18)^4}}{\sqrt{(6)^4}}=\frac{\sqrt[3]{(2^2\cdot 3)^4}\cdot 18}{\sqrt{(2\cdot 3)^4}}$$

En los radicando realizamos las operaciones con potencias y ponemos a común índice para poder efectuar la división

$$=\frac{18\sqrt[3]{2^8\cdot 3^4}}{\sqrt{2^4\cdot 3^4}}=18\sqrt[6]{\frac{(2^8\cdot 3^4)^2}{(2^4\cdot 3^4)^3}}=18\sqrt[6]{\frac{2^{16}\cdot 3^8}{2^{12}\cdot 3^{12}}}$$

Simplificamos el radical dividiendo por 2 el índice y los exponentes del radicando y realizamos una división de potencias con el mismo exponente

$$18\sqrt[6]{\frac{2^4}{3^4}}=18\sqrt[3]{\frac{2^2}{3^2}}=18\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

3Escribir en forma de radical las potencias:

$$9^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{9}$$

$$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

$$12^{0.2} = 12^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{12}$$

4Expresar como potencia fraccionaria

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}} = x^{-\frac{1}{5}}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{15+10+12}{30}} = x^{\frac{37}{30}}$$

Raíz de un radical

La **raíz de un radical** es otro **radical** de **igual radicando** y cuyo **índice** es el **producto de los dos índices**.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Ejemplo:

1 $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}}$

Multiplicamos los índices

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[24]{2}$$

2 $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}$

Introducimos el primer 2 dentro de la raíz cúbica por lo que tendremos que elevarlo al cubo y multiplicamos las potencias con la misma base

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^4\sqrt[4]{2}}}$$

Introducimos el 2^4en la raíz cuarta por lo que tenemos que elevarlo a la cuarta, realizamos el producto de potencias y por último el producto de los índices

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{(2^4)^4 \cdot 2}}} = \sqrt[24]{2^{17}}$$

EJERCICIOS

1. $\frac{1}{2}\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

2. $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$

3. $-\frac{3}{4}\sqrt[5]{6} + 3\sqrt[5]{6} + 4\sqrt[5]{6}$

4. $-5\sqrt[7]{4} - 3\sqrt[7]{4} + 10\sqrt[7]{4} - 9\sqrt[7]{4}$

5. $-\sqrt[4]{8} + 2\sqrt[4]{8} + 4\sqrt[4]{8}$

1. $\sqrt{48} \cdot \sqrt{72}$

2. $\sqrt{108} \cdot \sqrt{20}$

3. $4\sqrt{18} \cdot 2\sqrt{45} \cdot \sqrt{75}$

4. $\sqrt{98} \cdot \sqrt{50}$

5. $\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{128} \cdot \sqrt[3]{24}$

6. $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{250} \cdot \sqrt[3]{128}$

I-) Realiza las siguientes multiplicaciones de radicales.

a) $2\sqrt{7}\,x5\sqrt{8}$

b) $-3\sqrt[3]{2}\,x6\sqrt[3]{2}$

c) $-4\sqrt[3]{3}\,x6\sqrt[3]{10}\,x(-5)\sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt[4]{8}\,x\sqrt[4]{2}\,x\sqrt[4]{7}$

e) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{8}\,x\frac{-1}{3}\sqrt[3]{2}\,x\frac{5}{8}\sqrt[3]{7}$

II-) Realiza las siguientes multiplicaciones de radicales reduciéndolo a índice común.

a) $\sqrt[2]{5}\ x\ \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[4]{2}\ x\ \sqrt[5]{2}$

c) $\sqrt[3]{3}\ x\ \sqrt[4]{7}$

d) $\sqrt[2]{9}\ x\ \sqrt[4]{2}\ x\ \sqrt[3]{5}$

e) $\sqrt[3]{2}\ x\ \sqrt[5]{8}\ x\ \sqrt[6]{7}$

III-) Realiza las siguientes divisiones de radicales.

a) $\sqrt{25} \div \sqrt{5}$

b) $\sqrt[4]{2} \div \sqrt[4]{2}$

c) $\sqrt[3]{28} \div \sqrt[3]{7}$

d) $-\sqrt{9} \div \sqrt{3} \div \sqrt{3}$

e) $-10\sqrt[5]{2} \div 5\sqrt[5]{8} \div \sqrt[5]{7}$